

SÉRIE A, No. 939

No. D'ORDRE: 964

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

MASAHIKO SAITO

1^{re} THESE. — “SOUS-GROUPES DISCRETS DES GROUPES
RÉSOLUBLES.”

2^e THESE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 Juin 1960 devant la Commission d'examen.

MM. CARTAN,

DIXMIER

CHEVALLEY

Président.

} Examinateurs.

— • • • —

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POURO BTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

MASAHIKO SAITO

1^{re} THESE. — “SOUS-GROUPES DISCRETS DES GROUPES
RÉSOLUBLES.”

2^e THESE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 Juin 1960 devant la Commission d'examen.

MM. CARTAN,
DIXMIER
CHEVALLEY

Président.

} Examinateurs.



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... J. PÉRÈS.

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	GRIVET	T	Radioélectricité.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.	PONCIN	T	Mécanique générale.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
BARRABE	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	QUELET	T	Chimie organique.
BOURCART	T	Géographie physique et géologie dynamique.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
PLANTEFOL	T	Botanique.	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
GRASSE	T	Évolution des êtres organisés.	GUVILLIER	T	Micropaléontologie.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	JUNG	T	Pétrographie.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
WYART	T	Minéralogie.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste.
TEISSIER	T	Zoologie.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	M. PRUVOST	T	Géologie.
MONNIER	T	Physiologie générale.	AMIEL	T	Chimie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	HOCART	T	Minéralogie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	J. P. MATHIEU	T	Physique (option), (Orsay).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	COUTEAUX	T	Biol. animale (P.C.B.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.	MAY	T	Zoologie (Orsay).
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.
COULOMB	T	Physique du Globe.	FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.).	GUINIER	T	Physique des solides.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	JOST	T	Physiologie comparée.
P. DRACH	T	Zoologie.	FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).	SCHWARTZ	T	Calcul diff. et intégr.
EPHRUSSI	T	Génétique.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	MALAVARD	T	Aviation.
RIVIÈRE	T	Géologie (S. P. C. N.) (Orsay).	BRELOT	T	Calcul différentiel.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).	NORMANT	T	Synthèse organique.
LUCAS	T	Recherches physiques.	BÉNARD	T	Chimie minérale.
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
ARNULF	T	Optique appliquée.	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
M. MORAND	T	Enseignement de physique.	GELOSO	T	Chimie (S.P.C.N.).
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).	SOCALINAC	T	Psychophysiologie.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
DANJON	T	Astronomie.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
PETIT	T	Biologie maritime.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	CHADEFAUD	T	Botanique.
GALLIEN	T	Embryologie.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie générale.
EICHHORN	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	SALEM	T	Mathématiques générales.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	LELONG	T	Mathématiques générales.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.	DEVILLIERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
THELLIER	T	Physique du Globe.	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
			FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).

GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	MOYSE	T	Physiologie végétale (Orsay).
GODEMENT	T	Mathématiques (M.G.P.)	PANNETIER		Chimie (S.P.C.N.)
PISOT	T	Technique mathéma- tique de la Physique.	POSSOMPES	T	Zoologie.
ROCHE (E.)	T	Géologie.	PULLMANN		Chimie théorique.
SCHATZMANN	T	Astrophysique.	TEILLAC		Physique nucléaire et radioactivité.
TERMIER	T	Paléontologie stratigra- phique.	TONNELAT		Biologie physico-chi- mique.
ZAMANSKY	T	Mathématiques géné- rales.	VILLE	T	Économétrie.
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).	WILLEMART		Chimie (P.C.B.).
RIZET	T	Génétique.	DODÉ	T	Chimie (S. P. C. N.) (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.	FREYMANN	T	Physique générale.
M ^{me} TONNELAT	T	Relativité.	GUINOCHE	T	Biologie végétale (Orsay).
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)	ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).
SOUGHAY	T	Chimie générale.	M ^{lle} JOSIEN	T	Chimie (P.C.B.).
AIGRAIN	T	Électrotechnique géné- rale.	CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
BRUSSET		Chimie minérale.	ARNOULT	T	Électronique.
M. LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies.	CHAPELLE	T	Physique (M.P.C.)Orsay.
M ^{me} CHAIX		Chimie biologique.	DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).
M ^{me} HUREL-PY		Biologie Végétale (P.C.B.).	DENY	T	Mathématiques (M.G.P.).
PIAUX		Chimie (M.P.C.).	GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
BRUN	T	Mécanique expérimentale des fluides.	LUCAS G.	T	Géologie.
LEDERER	T	Chimie biologique.	ALLARD		Chimie physique.
M ^{me} DUBREIL	T	Mathématiques.	BERTHELOT		Physique nucléaire et Radioactivité.
M ^{me} LELONG	T	Mathématique (E.N.S.).	BRICARD	T	Météorologie et Phy- sique de l'atmosphère.
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).	M ^{me} ALBE-FESSARD		Physico-Physiologie.
COTTE	T	Physique (Orsay).	FREIDEL	T	Physique des solides.
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.	M. JULIA		Étude des molécules or- ganiques complexes.
LAMOTTE		Zoologie (E.N.S.).	LENDER		Biologie animale (S.P.C.N.) (Orsay).
MICHEL André	T	Chimie (S.P.C.N.).	MAGAT		Physico-chimie des rayonnements.
OLMER	T	Énergétique géné- rale.	M ^{lle} QUINTIN	T	Électrochimie.
ROUAULT	T	Physique générale.	MONOT	T	Chimie du métabolisme.
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.	BENOIT	T	Physiologie animale.
BARCHIEWITZ	T	Chimie physique.	DE POSSE L.	T	Analyse numérique.
BROSSEL	T	Physique atomique.	CHARLOT	T	Chimie analytique.
BUSER		Physiologie comparée.	HAÏSSINSKY	T	Radiochimie.
CAMUS		Physiologie végétale (3 ^e cycle).	LEMÉE	T	Physiologie (B.M.P.V.).
CASTAING		Physique générale.	GUÉRIN	T	Chimie (M.P.C.).
CURIEN		Minéralogie et cristallographie.			
CHATELET M.		Chimie (S.P.C.N.).	BEAUMONT		Biologie animale (S. P. C. N.)
JEAN		Physique Nucléaire. et Radioactivité.	BLAMONT		Géophysique Ionos- phère.
MATTLER		Physique (S.P.C.N.).	BOURREAU		Biologie Végétale S. P. C. N. (Orsay).
MICHEL (LOUIS) ..		Physique théorique. des hautes énergies.	CURIE D.		Physique (M. G. P.)
RUMPF		Chimie (P.C.B.).	DURAND-DELGA ..		Géologie.
BERGERARD		Zoologie (Orsay)	FREON		Chimie (P. C. B.)
BERTEIN		Electronique	HELLER		Physiologie végétale.
BOUSSIÉRES		Chimie des Radioélé- ments.	TORTRAT		Calcul des Probabili- tés.
Mme COUTURE ..		Physique (P.C.B.).	CAILLEUX		Géologie (S. P. C. N.)
ELLENBER GER ..		Géologie Structurale et Géologie appli- quée.	MAGNAN		Physique (M. P. C.)
FRANC		Biologie animale.	DAUDEL		Mécanique Ondula- toire appliquée à la chimie théorique et à la Physique Nuclé- aire.
SCHNELL		Botanique tropicale.			
STOLKOWSKI		Physiologie générale.	M ^{lle} FOURCROY		Biologie Végétale (S. P. C. N.)
ACHER		Chimie Biologique (Orsay.)			
BAUDOIN		Biologie animale (P. C. B.)			

Secrétaire général.....C.MONIER



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SOUS-GROUPES DISCRETS DES GROUPES RESOLUBLES.*

par MASAHIKO SAITO.

Introduction. L'objet de ce mémoire est l'étude de la compacité des espaces quotient des groupes de Lie résolubles par des sous-groupes discrets, ainsi que l'étude des structures kählériennes invariantes sur ces groupes en rapport avec la première question. On dira d'après A. I. Malcev qu'un sous-groupe D d'un groupe topologique G est uniforme dans G si l'espace quotient de G par l'adhérence de D est compact. Malcev [3] a démontré que pour qu'il existe un sous-groupe discret et uniforme dans un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe G , il faut et il suffit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G admette une base par rapport à laquelle les constantes de structure sont toutes rationnelles. Dans ce mémoire, nous établirons un théorème dans une certaine mesure analogue relatif aux groupes de Lie algébriques résolubles.

Dans le § 1, on étudiera diverses questions concernant les sous-groupes discrets des groupes de Lie nilpotents et résolubles.

T. Ono [8] a récemment développé une théorie arithmétique des groupes algébriques; il a notamment généralisé le théorème des unités de Dirichlet aux groupes algébriques résolubles en se servant des caractères rationnels d'un groupe algébrique. D'un autre côté, d'après G. D. Mostow [5], si G est un sous-groupe algébrique irréductible et résoluble de $GL(n, \mathbf{Q})$, l'espace quotient du plus petit sous-groupe algébrique de $GL(n, \mathbf{R})$ contenant G par $G \cap GL(n, \mathbf{Z})$ est revêtu un nombre fini de fois par le produit d'un espace euclidien et d'un espace compact. On déduira sans difficulté des résultats de Ono que la dimension de la partie euclidienne est égale au rang du groupe des caractères rationnels de G (Théorème 2).

Dans le § 3, la question d'existence d'un sous-groupe discret et uniforme dans un groupe de Lie algébrique résoluble sera ramenée à celle de l'uniformité dans un certain groupe matriciel associé du sous-groupe des matrices entières de déterminant ± 1 (Théorème 3). En tenant compte du Théorème 2, on peut dans une certaine mesure exprimer ces conditions au moyen des caractères rationnels du groupe associé (Corollaires 1 et 2).

Dans le § 4, on déterminera d'abord la structure des groupes résolubles algébriques (ou bien des groupes de Lie résolubles connexes et simplement

* Received January 17, 1961.

connexes) qui admettent des sous-groupes commutatifs discrets et uniformes (Théorèmes 4 et 5). En tenant compte d'un résultat de J. Hano [2], on saura qu'un tel groupe, pourvu qu'il soit de dimension paire, admet une structure kählérienne invariante (à gauche ou à droite). Si en particulier le groupe est unimodulaire et algébrique, la réciproque est aussi vraie (Théorème 5).

Le reste de ce mémoire est consacré à une construction d'une variété abélienne à partir d'une structure kählérienne invariante sur un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. Un résultat partiel de ce paragraphe a déjà été annoncé dans [10].

L'auteur désire exprimer ici sa profonde reconnaissance à Monsieur C. Chevalley pour ses suggestions utiles et son constant encouragement au cours de ce travail. Entre autres choses, la démonstration de la Proposition 5 lui est due.

Notations. On désignera par $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ respectivement l'anneau des entiers rationnels, le corps des nombres rationnels et le corps des nombres réels. Si K est un corps, $GL(n, K)$ et $\mathfrak{gl}(n, K)$ désigneront respectivement le groupe des matrices inversibles de degré n à coefficients dans K et l'algèbre de Lie des matrices de degré n à coefficients dans K . On désignera par $GL(n, \mathbf{Z})$ le groupe des matrices de déterminant ± 1 de degré n à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Si G est un sous-groupe de $GL(n, \mathbf{R})$ ou de $GL(n, \mathbf{Q})$, $G^{\mathbf{Q}}$ et $G^{\mathbf{Z}}$ seront respectivement $G \cap GL(n, \mathbf{Q})$ et $G \cap GL(n, \mathbf{Z})$. Si G est un sous-groupe de $GL(n, \mathbf{Q})$, $G^{\mathbf{R}}$ sera le plus petit sous-groupe algébrique de $GL(n, \mathbf{R})$ contenant G .

Si G est un groupe de Lie, Ad et ad désigneront respectivement la représentation adjointe de G et sa différentielle. Pour un groupe G et pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathcal{L}^i(G)$ et $\mathcal{L}^i(\mathfrak{g})$ désigneront respectivement le i -ième terme de la série centrale décroissante de G et de $\mathfrak{g}$.

1. Groupes de Lie nilpotents et résolubles.

Définition. Soient G un groupe topologique et D un sous-groupe de G . On dira d'après A. I. Malcev [3] que D est uniforme dans G si l'espace quotient de G par l'adhérence de D dans G est compact.

Le théorème suivant démontré par G. D. Mostow [5] jouera un rôle fondamental dans notre raisonnement.

THÉORÈME M. Soient G un groupe de Lie résoluble connexe, D un sous-groupe discret et uniforme de G et N le plus grand sous-groupe analytique

distingué et nilpotent de G . Alors $D \cap N$ est uniforme dans N et par conséquent DN est fermé dans G .

Définition. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0. Une base de $\mathfrak{g}$ sera dite *rationnelle* si les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ par rapport à cette base sont toutes rationnelles.

Le théorème de Campbell-Hausdorff-Dynkin (voir [11]) appliqué aux groupes de Lie nilpotents nous donne le lemme suivant.

LEMME 1. Soient G un groupe de Lie nilpotent et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Supposons qu'il existe une base rationnelle $X_1, \dots, X_n$ de $\mathfrak{g}$. Alors tout élément du sous-groupe de G engendré par les éléments $\exp X_i$ ($1 \leq i \leq n$) peut s'écrire sous la forme $\exp X$, où X est une combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_n$ à coefficients rationnels.

PROPOSITION 1. Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe et D un sous-groupe uniforme de G . Alors $\mathcal{B}^i(D)$ est uniforme dans $\mathcal{B}^i(G)$ pour tout i .

On démontrera la proposition par récurrence sur i . Supposons que $\mathcal{B}^{i-1}(D)$ soit uniforme dans $\mathcal{B}^{i-1}(G)$. Soit H l'intersection de tous les sous-groupes analytiques de G contenant $\mathcal{B}^i(D)$. H est lui-même un sous-groupe analytique et $\mathcal{B}^i(D)$ est uniforme dans H (voir [9]). Désignons par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G , H respectivement. Alors $\mathfrak{h}$ est le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les éléments X de $\mathfrak{g}$ tels que $\exp X \in \mathcal{B}^i(D)$ (voir [9]). Soient x un élément de D et y un élément de $\mathcal{B}^i(D)$. Il existe donc des éléments uniquement déterminés X de $\mathfrak{g}$ et Y de $\mathfrak{h}$ tels que $x = \exp X$ et $y = \exp Y$. Puisque $\exp \operatorname{Ad} x(Y) = yx^{-1} \in \mathcal{B}^i(D) \subset H$, $\operatorname{Ad} x(Y)$ appartient à $\mathfrak{h}$. Comme $\operatorname{Ad} x$ est un endomorphisme unipotent, $\operatorname{ad} X$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme de $\operatorname{Ad} x$. Donc l'élément $[X, Y] = \operatorname{ad} X(Y)$ appartient à $\mathfrak{h}$. Puisque les éléments X engendrent $\mathfrak{g}$ (voir [9]), $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Soient maintenant x un élément de D et y un élément de $\mathcal{B}^{i-1}(D)$. Posons $x = \exp X$, $y = \exp Y$ où $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathcal{B}^{i-1}(\mathfrak{g})$. On a la relation de congruence $xyx^{-1} \equiv y \pmod{H}$, d'où la relation $\operatorname{Ad} x(Y) \equiv Y \pmod{\mathfrak{h}}$. En passant à l'égalité dans l'algèbre quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, on peut conclure par le même raisonnement que le précédent que l'élément $[X, Y]$ appartient à $\mathfrak{h}$. Donc on a $\mathcal{B}^i(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{B}^{i-1}(\mathfrak{g})] \subset \mathfrak{h}$. L'inclusion au sens inverse étant évidente, on a $\mathcal{B}^i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$, ce qui achève la démonstration de la Proposition 1.

Soit D un groupe résoluble. On dira qu'un ensemble ordonné $\{x_1, \dots, x_n\}$ d'éléments de D est un *système libre de générateurs* si tout élément de D peut se représenter dans une seule façon sous la forme $\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$, où des a_i sont des entiers.

Soit g une algèbre de Lie et soit $g_0, g_1, \dots, g_r$ une série normale de g ; c'est-à-dire, une série décroissante de sous-algèbres telle que $g_0 = g$, $g_r = \{0\}$ et que g_i soit un idéal dans g_{i-1} ($1 \leq i \leq r$). Une base $X_1, \dots, X_n$ de g sera dite *adaptée* à cette série si, pour tout i , il existe une partie de cette base qui forme une base de g_i .

La proposition suivante est due à Y. Matsushima (voir [4] Theorem 3).

PROPOSITION 2. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe et D un sous-groupe discret et uniforme dans G . Il existe alors une base $X_1, \dots, X_n$ de l'algèbre de Lie g de G adaptée à la série centrale décroissante de g telle que, si l'on pose $x_i = \exp X_i$, les éléments $x_1, \dots, x_n$ constituent un système libre de générateurs de D .*

PROPOSITION 3. *Les notations étant celles de la Proposition 2, la base $X_1, \dots, X_n$ de g est rationnelle.*

Soit en effet g_i ($1 \leq i \leq n$) le sous-espace de g engendré par les éléments $X_{i+1}, \dots, X_n$. Les g_i sont des sous-algèbres de g . Démontrons par récurrence sur i que les éléments $X_{i+1}, \dots, X_n$ constituent une base rationnelle de g_i . L'assertion est triviale pour $i = n$. Supposons qu'elle soit vraie pour les indices supérieurs à i . Soit k un nombre plus grand que i . Puisque notre base s'adapte à la série centrale décroissante de g , l'élément $x_i x_k x_i^{-1}$ est de la forme $\prod_{j=k+1}^n x_j^{a_j}$, les a_j étant entiers. Par l'hypothèse de récurrence, les éléments $X_{k+1}, \dots, X_n$ forment une base rationnelle de g_k . Par le Lemme 1, l'élément $\prod_{j=k+1}^n x_j^{a_j}$ est de la forme $\exp(\sum_{j=k+1}^n b_j X_j)$, où les b_j sont des nombres rationnels. Utilisant l'égalité $x_i x_k x_i^{-1} = \exp \operatorname{Ad} x_i(X_k)$, on obtient la relation $\operatorname{Ad} x_i(X_k) = \sum b_j X_j$. $\operatorname{Ad} x_i$ étant unipotent, $\operatorname{ad} X_i$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme à coefficients rationnels de $\operatorname{Ad} x_i$. On obtient donc $[X_i, X_k] = \sum_{j=k+1}^n c_j X_j$, où les c_j sont des nombres rationnels, ce qui démontre la Proposition 3.

THÉORÈME 1. *Soient G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe, N le plus grand sous-groupe analytique distingué nilpotent de G et D un sous-groupe discret uniforme de G . Il existe alors un système libre de générateurs $x_1, \dots, x_n$ de D dont une partie $x_{r+1}, \dots, x_n$ forme un système libre de générateurs de $D \cap N$ tel que, si l'on pose $x_i = \exp X_i$ ($r+1 \leq i \leq n$), les éléments $X_{r+1}, \dots, X_n$ constituent une base rationnelle de l'algèbre de Lie n de N adaptée à la série centrale décroissante de n .*

Par le Théorème M, $D \cap N$ et DN/N sont sous-groupes discrets et uni-

formes dans N et G/N respectivement. Il existe donc par les Propositions 2 et 3 une base rationnelle $X_{r+1}, \dots, X_n$ de n adaptée à la série centrale décroissante de n telle que, si l'on pose $x_i = \exp X_i$ ($r+1 \leq i \leq n$), les éléments $x_{r+1}, \dots, x_n$ forment un système libre de générateurs de $D \cap N$. D'un autre côté, il existe un système libre de générateurs $x_1^*, \dots, x_r^*$ de DN/N . Prenons une image réciproque x_i de x_i^* dans D ($1 \leq i \leq r$). Alors les éléments $x_1, \dots, x_n$ forment un système libre de générateurs de D ayant les propriétés voulues, ce qui démontre le Théorème 1.

PROPOSITION 4. Soient G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe et D un sous-groupe discret et uniforme de G . Désignons par $l(G)$ et $l(D)$ les longueurs des séries des commutateurs de G et de D respectivement. Alors

$$l(G) \geq l(D) \geq l(G) - 1.$$

Si G est nilpotent, l'égalité $l(G) = l(D)$ a lieu.

Soit d'abord G nilpotent. Supposons que la dernière égalité ait lieu pour les groupes nilpotents de longueurs moins que celle de G . $[D, D]$ est uniforme dans $[G, G]$ par la Proposition 1. Par l'hypothèse de récurrence, on a l'égalité $l([G, G]) = l([D, D])$, d'où l'égalité $l(G) = l(D)$. Dans le cas général, soit N le plus grand sous-groupe analytique distingué nilpotent de G . Le Théorème M dit que $D \cap N$ est uniforme dans N et donc que $l(D \cap N) = l(N)$. Puisque N contient le groupe des commutateurs $[G, G]$ de G , on a $l(G) - 1 \leq l(N) = l(D \cap N) \leq l(D)$, ce que démontre la Proposition 4.

G. D. Mostow [7] a introduit la notion de rang d'un groupe résoluble. Soit D un groupe résoluble et soit $\mathcal{D}^i(D)$ le i -ième terme de sa série des commutateurs. Le rang de D est défini par la somme suivante :

$$\text{rang } D = \sum_i \text{rang}(\mathcal{D}^{i-1}(D)/\mathcal{D}^i(D))$$

Les rangs du côté droit sont des rangs dans le sens usuel des groupes commutatifs. Puisque D est résoluble, la sommation est finie. Nous énumérons ci-dessous quelques propriétés du rang d'un groupe résoluble (voir [7] et [8]).

1. Si D' est un sous-groupe d'un groupe résoluble D , on a alors $\text{rang } D' \leq \text{rang } D$. Si en particulier D' est d'indice fini dans D , on a l'égalité $\text{rang } D' = \text{rang } D$.

2. Si D' est un sous-groupe distingué de D , alors $\text{rang } D = \text{rang } D/D'$

$+$ rang D' . Donc, pour n'importe quelle série normale $D_0, D_1, \dots, D_r$ de D , on a

$$\text{rang } D = \sum_{i=1}^r \text{rang } D_{i-1}/D_i.$$

3. Soient G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe et D un sous-groupe discret de G . Alors $\text{rang } D \leq \dim G$.

4. Si un groupe résoluble D admet un système libre de générateurs $x_1, \dots, x_n$, alors le nombre n est égal à $\text{rang } D$.

Soit G un groupe de Lie à un nombre fini de composantes connexes. Il existe alors d'après [6] un sous-groupe compact maximal de G , et deux sous-groupes compacts maximaux de G sont conjugués par un automorphisme intérieur de G .

LEMME 2. *Soient G un groupe de Lie résoluble à un nombre fini de composantes connexes, K un sous-groupe compact maximal de G et D un sous-groupe discret de G . Alors $\text{rang } D$ est fini et au plus égal à $\dim G - \dim K$. Supposons qu'il existe un sous-groupe analytique fermé distingué et nilpotent N tel que le groupe quotient G/N soit nilpotent et que le sous-groupe DN soit fermé. Alors pour que l'égalité $\text{rang } D = \dim G - \dim K$ ait lieu, il faut et il suffit que D soit uniforme dans G .*

Soit G_0 la composante connexe de l'élément neutre de G . Alors $D \cap G_0$ est d'indice fini dans D , et par suite $\text{rang } D = \text{rang } D \cap G_0$. D'un autre côté, G/D est compact si et seulement si $G_0/D \cap G_0$ est compact. On peut donc supposer G connexe.

Soient $\tilde{G}$ le revêtement universel de G et $\tilde{D}$ l'image réciproque de D dans $\tilde{G}$. Alors $\text{rang } \tilde{D}$ est fini et au plus égal à $\dim \tilde{G}$ par la troisième propriété du rang. Soit A le noyau de l'homomorphisme canonique de $\tilde{G}$ sur G . La deuxième propriété du rang entraîne l'égalité $\text{rang } \tilde{D} - \text{rang } D = \text{rang } A$. Soit encore K la composante connexe de l'élément neutre de l'image réciproque de K dans $\tilde{G}$. Puisque $\tilde{K}$ est le revêtement universel du tore K et que l'espace quotient G/K est simplement connexe, A est contenu dans $\tilde{K}$ et donc $\text{rang } A = \dim K$. On a donc l'inégalité $\text{rang } D \leq \dim G - \dim K$, ce qui démontre la première assertion. Il suffira de démontrer la deuxième assertion pour le cas simplement connexe.

Supposons G nilpotent. L'assertion est évidemment vraie pour les groupes commutatifs. Supposons qu'elle soit vraie pour les groupes dont la longueur

de la série centrale décroissante est moindre que celle de G . Si D est uniforme dans G , $D \cap \mathcal{E}^1(G)$ est uniforme dans $\mathcal{E}^1(G)$ par la Proposition 1 et par suite $D\mathcal{E}^1(G)$ est fermé. Donc les sous-groupes discrets $D\mathcal{E}^1(G)/\mathcal{E}^1(G)$ et $D \cap \mathcal{E}^1(G)$ sont respectivement uniformes dans $G/\mathcal{E}^1(G)$ et $\mathcal{E}^1(G)$. L'hypothèse de récurrence entraîne les deux égalités $\text{rang}(D\mathcal{E}^1(G)/\mathcal{E}^1(G)) = \dim(G/\mathcal{E}^1(G))$ et $\text{rang}(D \cap \mathcal{E}^1(G)) = \dim \mathcal{E}^1(G)$; d'où l'égalité voulue $\text{rang } D = \dim G$.

Supposons réciproquement $\text{rang } D = \dim G$. Soit H le plus petit sous-groupe analytique de G contenant D . D est uniforme dans H ; mais H est égal à G par l'inégalité $\text{rang } D \leq \dim H$, ce qui démontre notre assertion.

Considérons le cas général. Par l'hypothèse, DN/N et $D \cap N$ sont des sous-groupes discrets dans G/N et N respectivement. Donc on a les inégalités $\text{rang } DN/N \leq \dim G/N$ et $\text{rang } D \cap N \leq \dim N$. Si D est uniforme dans G , DN/N et $D \cap N$ sont uniformes dans G/N et N . Puisque G/N et N sont nilpotents, on a les deux égalités $\text{rang } DN/N = \dim G/N$ et $\text{rang } D \cap N = \dim N$, qui entraînent l'égalité voulue. Si réciproquement l'égalité $\text{rang } D = \dim G$ a lieu, on obtient, en vertu des deux inégalités ci-dessus, les deux égalités $\text{rang } DN/N = \dim G/N$ et $\text{rang } D \cap N = \dim N$. Donc DN/N et $D \cap N$ sont uniformes dans G/N et N respectivement, puisque G/N et N sont nilpotents. Ceci implique que D est uniforme dans G . Le Lemme 2 est donc démontré.

2. Groupes algébriques résolubles. Soit K un corps de caractéristique 0. On entendra par K -tore un sous-groupe algébrique irréductible et commutatif de $GL(n, K)$ formé de matrices semi-simples.

Soient G un sous-groupe algébrique irréductible et résoluble dans $GL(n, K)$, G_u le sous-groupe des matrices unipotentes de G et S un K -tore maximal contenu dans G . Alors G se décompose en produit semi-direct de S et de G_u , G_u étant distingué dans G . Si on désigne par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_u$ et $\mathfrak{s}$ respectivement les algèbres de Lie de G , de G_u et de S , on obtient une décomposition de $\mathfrak{g}$ en produit semi-direct de $\mathfrak{s}$ et de $\mathfrak{g}_u$. On appellera ces décompositions *décomposition de Chevalley*.

LEMME 3. Soit K un corps de caractéristique 0. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre algébrique commutative de $\mathfrak{gl}(n, K)$ composée de matrices semi-simples. Alors, si $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, il existe un élément A de $\mathfrak{g}$ tel que $\text{Tr } A^2 \neq 0$.

Soit $\bar{K}$ une extension algébriquement close de K , et soit $\bar{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n, \bar{K})$ engendrée par $\mathfrak{g}$. On peut transformer simultanément les matrices de $\bar{\mathfrak{g}}$ en matrices diagonales; supposons que $A \in \bar{\mathfrak{g}}$ soit transformé en

$(\alpha_1(X), \dots, \alpha_m(X))$. Alors les matrices de $\bar{g}$ sont caractérisées par un certain nombre de relations linéaires à coefficients rationnels entre les $\alpha_i(X)$, qui peuvent se mettre sous la forme $\alpha_{m+i}(X) = \sum_{j=1}^m c_{ij} \alpha_j(X)$ ($1 \leq i \leq n-m$), les c_{ij} étant rationnels. La forme quadratique $\sum_{j=1}^m X_j^2 + \sum_{i=1}^{n-m} (\sum_{j=1}^m c_{ij} X_j)^2$ étant > 0 , il existe un élément $X \in \bar{g}$ tel que $\text{Tr } X^2 \neq 0$. Si $A_1, \dots, A_r$ est une base de g , la forme quadratique $\sum_{i,j} c_{ij} \text{Tr } A_i A_j$ qui prend des valeurs $\neq 0$ sur $\bar{K}$ prend aussi des valeurs $\neq 0$ sur K . Le Lemme 3 est donc démontré.

COROLLAIRE. *La forme bilinéaire $(A, B) \rightarrow \text{Tr } AB$ sur $g \times g$ est non-dégénérée.*

En effet, utilisons les notations de la démonstration précédente. Soit S une matrice de $GL(n, \bar{K})$ telle que SgS^{-1} soit composé de matrices diagonales; alors les matrices $\bar{Y}$ telles que $S\bar{Y}S^{-1}$ soient diagonaux et que $\text{Tr } \bar{X}\bar{Y} = 0$ pour tout $\bar{X} \in g$ forment une algèbre de Lie algébrique $\bar{h}$, donc $\bar{g} \cap \bar{h}$ est algébrique, d'où $g \cap h = \{0\}$ d'après le résultat précédent. On a donc démontré le Corollaire.

PROPOSITION 5. *Soit K un corps de caractéristique 0, et soit g une sous-algèbre algébrique commutative de $gl(n, K)$. Alors g se décompose en produit direct de sous-algèbres algébriques qui n'admettent aucune sous-algèbre algébrique.*

En effet, soit $g = g_s \times g_u$ la décomposition de Chevalley de g . Puisque toute algèbre formée de matrices nilpotentes est algébrique, g_u est le produit direct de sous-algèbres algébriques de dimension 1. De l'autre côté, supposons que g_s admette une sous-algèbre algébrique a . Soit b le sous-espace de g_s formé des matrices X de g_s telles que $\text{Tr } XY = 0$ pour tout $Y \in a$. D'après le Corollaire précédent, b est une algèbre de Lie algébrique et g_s se décompose en produit direct de a et de b , ce qui achève la démonstration de la Proposition 5.

LEMME 4. *Soit g une sous-algèbre algébrique commutative de $gl(n, \mathbf{R})$ formée de matrices semi-simples. Alors g est le produit direct de la sous-algèbre algébrique des matrices à valeurs propres réelles et de la sous-algèbre algébrique des matrices à valeurs propres purement imaginaires.*

On peut supposer que tout élément X de g est de la forme :

$$\left[\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{cc} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{array}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{array}{cc} a_r & -b_r \\ b_r & a_r \end{array}} & \\ & & & c_1 \\ & & & \ddots \\ & & & c_s \end{array} \right]$$

Alors la partie diagonale Y de X et la matrice $X - Y$ sont des répliques de X , donc appartiennent à $\mathfrak{g}$. L'expression $X = Y + (X - Y)$ donne la décomposition de $\mathfrak{g}$.

COROLLAIRE. Soit G un $\mathbf{R}$ -tore. Alors G est engendré par le plus grand sous-groupe compact de G et par le plus grand sous-groupe algébrique irréductible diagonalisable de G . Leur intersection est finie.

C'est une conséquence directe du Lemme 4.

Définition. Soit G un groupe algébrique de matrices à coefficients dans un corps K . Un caractère rationnel de G est une représentation rationnelle de G dans le groupe multiplicatif des éléments non-nuls de K . On définit la multiplication de deux caractères rationnels χ, χ' par la formule

$$(\chi\chi')(x) = \chi(x)\chi'(x) \quad \text{pour } x \in G.$$

Alors l'ensemble de tous les caractères rationnels de G forme un groupe commutatif, qu'on désignera par $X(G)$.

PROPOSITION 6. Soient G un $\mathbf{R}$ -tore et K le plus grand sous-groupe compact de G . Alors le groupe des caractères rationnels $X(G)$ de G est un groupe commutatif sans torsion de rang égal à $\dim G - \dim K$.

Les Propositions 1 et 2 de T. Ono [8] disent que $X(G)$ est un groupe commutatif sans torsion de rang fini. Soit H le plus grand sous-groupe algébrique irréductible diagonalisable de G . Alors la restriction d'un caractère rationnel de G à H est un homomorphisme de $X(G)$ dans $X(H)$. D'après le Corollaire du Lemme 4, cet homomorphisme est de noyau fini et de conoyau

fini. Le rang de $X(G)$ est donc égal au rang de $X(H)$. H étant diagonalisable, $\text{rang } X(H) = \dim H$, ce qui démontre la Proposition 6.

Soit G un sous-groupe algébrique irréductible résoluble de $GL(n, \mathbf{Q})$. D'après G. D. Mostow [5], avec un peu de modification, l'espace quotient $G^{\mathbf{R}}/G^{\mathbf{Z}}$ est revêtu un nombre fini de fois par le produit direct d'un espace euclidien et d'un espace compact. Il n'est pas difficile de voir que la dimension de la partie euclidienne de $G^{\mathbf{R}}/G^{\mathbf{Z}}$, désignée par $\nu(G^{\mathbf{R}}/G^{\mathbf{Z}})$, est égale à $\dim G^{\mathbf{R}} - \dim K - \text{rang } G^{\mathbf{Z}}$ où K est un sous-groupe compact maximal de $G^{\mathbf{R}}$.

THÉORÈME 2. *Les notations étant comme ci-dessus, on a l'égalité*

$$(G^{\mathbf{R}}/G^{\mathbf{Z}}) = \text{rang } X(G).$$

Soient en effet G_u le sous-groupe de G formé des matrices unipotentes de G et S un $\mathbf{Q}$ -tore maximal contenu dans G . Alors $G = S \cdot G_u$ et $G^{\mathbf{R}} = S^{\mathbf{R}} \cdot G_u^{\mathbf{R}}$ sont des décompositions de Chevalley pour G et $G^{\mathbf{R}}$ respectivement. La projection de G sur S est une représentation polynômiale (voir la démonstration de la Proposition 15 de T. Ono [8]); le groupe $S^{\mathbf{Z}} \cdot G_u^{\mathbf{Z}}$ est donc d'indice fini dans $G^{\mathbf{Z}}$ par la Proposition 13(δ) de Ono [8]. On a toujours l'égalité $\dim G_u = \text{rang } G_u^{\mathbf{Z}}$ (voir Proposition 18, Ono [8]) et le théorème des unités pour les $\mathbf{Q}$ -tores (voir [8]) dit que

$$\text{rang } G^{\mathbf{Z}} = \text{rang } X(G^{\mathbf{R}}) - \text{rang } X(G).$$

En combinant ces égalités, on obtient l'égalité voulue.

COROLLAIRE. *Les notations étant comme ci-dessus, pour que $G^{\mathbf{Z}}$ soit uniforme dans $G^{\mathbf{R}}$, il faut et il suffit que G n'admette pas de caractère rationnel non-trivial.*

Ce Corollaire est aussi une conséquence directe du fait qu'un groupe algébrique irréductible résoluble est de type (C) dans le sens de Ono [8]. Il est donc un cas spécial d'un théorème plus général.

3. Sous-groupes discrets de groupes résolubles.

LEMME 5. *Soient G un sous-groupe algébrique de $GL(m, \mathbf{R})$ et f une représentation rationnelle de G dans $GL(n, \mathbf{R})$, m et n étant des entiers positifs. Alors l'image $f(G)$ est d'indice fini dans son adhérence algébrique dans $GL(n, \mathbf{R})$, et donc fermée dans $GL(n, \mathbf{R})$.*

En effet, la composante connexe G_0 de l'élément neutre de G est d'indice fini dans G (voir [7]). Soient N le noyau de f et G^* l'adhérence algébrique de $f(G)$ dans $GL(n, \mathbf{R})$. Alors $\dim G^* = \dim G - \dim N$. D'un autre côté,

$\dim f(G_0) = \dim G - \dim N$. Par conséquent $f(G_0)$ est la composante connexe de l'élément neutre dans G^* , et donc d'indice fini dans G^* , ce qui finit la démonstration du Lemme 5.

La Proposition 6, § 5, Ch. V de Chevalley [1] nous donne le lemme suivant.

LEMME 6. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble sur un corps de caractéristique 0 et $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Supposons que l'image de $\mathfrak{g}$ par sa représentation adjointe soit algébrique. Il existe alors dans $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre commutative $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{g}$ se décompose en produit semi-direct de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{n}$.

Le lemme suivant est bien connu.

LEMME 7. Soit G un groupe commutatif d'automorphismes semi-simples d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps. Supposons que G laisse stable un sous-espace U de V . Alors la représentation identique de G est équivalente à la somme directe des représentations sur U et sur V/U qui se déduisent de la représentation identique.

Soit G un groupe. Deux sous-groupes D et D' de G seront dits *commensurables* si leur intersection $D \cap D'$ est d'indice fini dans chacun d'eux. Le lemme suivant est bien connu (on peut en trouver une démonstration dans l'introduction de A. Weil ([12])).

LEMME 8. Soient G et H des sous-groupes algébriques de $GL(m, \mathbf{Q})$ et $GL(n, \mathbf{Q})$ respectivement. Supposons qu'il existe un isomorphisme rationnel f de G sur H . Alors $H^{\mathbf{Z}}$ et $f(G^{\mathbf{Z}})$ sont commensurables.

LEMME 9. Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe et Z son centre. Désignons par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}$ les algèbres de Lie de G , Z respectivement. Soient $\mathfrak{m}$ un sous-espace complémentaire de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{g}$ et M le sous-ensemble de G formé des éléments de la forme $\exp X$, où $X \in \mathfrak{m}$. Alors tout élément de G se représente dans une seule façon comme le produit d'un élément de M et d'un élément de Z .

Soit en effet x un élément de G . Il existe un élément X de $\mathfrak{g}$ tel que $x = \exp X$. X est la somme d'un élément $X_{\mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{m}$ et d'un élément $X_{\mathfrak{z}}$ de $\mathfrak{z}$. Si l'on pose $x_{\mathfrak{m}} = \exp X_{\mathfrak{m}}$ et $x_{\mathfrak{z}} = \exp X_{\mathfrak{z}}$, on obtient une décomposition voulue : $x = x_{\mathfrak{m}} \cdot x_{\mathfrak{z}}$.

Supposons ensuite qu'il y ait deux décompositions $x = x_{\mathfrak{m}} \cdot x_{\mathfrak{z}} = y_{\mathfrak{m}} \cdot y_{\mathfrak{z}}$ où $x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}} \in M$, $x_{\mathfrak{z}}, y_{\mathfrak{z}} \in Z$. On a $x_{\mathfrak{m}} = y_{\mathfrak{m}}(y_{\mathfrak{z}}x_{\mathfrak{z}}^{-1})$. On peut donc supposer qu'un

élément x de M est de la forme $x_m \cdot x_\delta$, où $x_m \in W$ et $x_\delta \in Z$. Supposons momentanément G simplement connexe. Il existe alors des éléments uniquement déterminés X, X_m de $\mathfrak{m}$ et X_δ de $\mathfrak{z}$ tels que $x = \exp X$, $x_m = \exp X_m$ et $x_\delta = \exp X_\delta$. (Il est à remarquer que Z est connexe). On a $X = X_m + X_\delta$, d'où $X = X_m$, $X_\delta = 0$. Donc notre assertion est vraie si G est simplement connexe. Soit maintenant $\tilde{G}$ le revêtement universel de G , et soient $\tilde{x}, \tilde{x}_m, \tilde{x}_\delta$ respectivement les éléments des images réciproques de x, x_m, x_δ dans $\tilde{G}$. On a alors $\tilde{x} = \tilde{x}_m \cdot \tilde{x}_\delta \cdot \tilde{y}$, où $\tilde{y}$ est un élément du centre de $\tilde{G}$. Donc $\tilde{x} = \tilde{x}_m$, ce qui entraîne les relations $x = x_m$ et $x_\delta = e$. Le Lemme 9 est donc démontré.

Soit G un groupe de Lie résoluble. Dans tout ce qui suit, P désignera la représentation de G sur le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie de G qui se déduit de la représentation adjointe de G . Désignons par ρ la différentielle de P .

THÉOREME 3. *Soit G un groupe algébrique résoluble d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des nombres réels. Alors pour qu'il existe dans G un sous-groupe discret et uniforme, il faut et il suffit que le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G admette une base rationnelle $\mathcal{B}$ telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites.*

1) *Soit N le sous-groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{n}$, et soient K et $\mathfrak{k}$ le plus grand sous-groupe compact de N et son algèbre de Lie. Alors la base $\mathcal{B}$ est adaptée à la série normale $\mathfrak{n}, \mathfrak{k}, \{0\}$ de $\mathfrak{n}$.*

2) *Si on considère $P(G)$ comme un groupe de matrices par rapport à $\mathcal{B}$, $P(G)^Z$ est uniforme dans $P(G)$.*

THÉOREME 3'. *Soit G un groupe de Lie résoluble à un nombre fini de composantes connexes. Supposons que l'image de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G par sa représentation adjointe soit algébrique. Alors la conclusion du Théorème 2 est aussi valable pour G .*

Le Théorème 3 est contenu dans le Théorème 3' en vertu du Lemme 5. On peut supposer sans restreindre la généralité que G est connexe. La démonstration procédera en plusieurs étapes.

1°) Supposons d'abord qu'il existe dans G un sous-groupe discret et uniforme D . Soient $\tilde{G}$ le revêtement universel de G , $\tilde{D}$ l'image réciproque de D dans $\tilde{G}$ et $\tilde{N}$ le plus grand sous-groupe analytique distingué et nilpotent de $\tilde{G}$. Alors $\tilde{D} \cap \tilde{N}$ est uniforme dans $\tilde{N}$ par le Théorème M. En vertu du Théorème 1, il existe un système libre de générateurs $u_1, \dots, u_r, x_1, \dots, x_n$ de $\tilde{D}$ dont la partie $x_1, \dots, x_n$ forme un système libre de générateurs de

$D \cap \tilde{N}$ tel que, si l'on pose $x_i = \exp X_i$ ($1 \leq i \leq n$), les éléments $X_1, \dots, X_n$ constituent une base rationnelle $\mathfrak{B}'$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de $\tilde{N}$ adaptée à la série centrale décroissante de $\mathfrak{n}$. On considérera désormais tout endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{n}$ comme une matrice par rapport à $\mathfrak{B}'$.

2°) On a la relation $\exp Adu_i(X_j) = u_j x_i u_i^{-1} = \prod_{k=1}^n x_k^{a_{ijk}}$, où les a_{ijk} sont des entiers. Puisque N est nilpotent et simplement connexe, $Adu_i(X_j)$ est une combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_n$ à coefficients rationnels par le Lemme 1. Les matrices Pu_i ($1 \leq i \leq r$) sont donc des matrices rationnelles. Par suite $P(D)$ est contenu dans $GL(n, \mathbb{Q})$ et $P(G)^{\mathbb{Q}}$ est uniforme dans $P(G)$.

3°) Soit H la composante irréductible de l'élément neutre de l'adhérence algébrique de $P(G)^{\mathbb{Q}}$ dans $GL(n, \mathbb{Q})$. $H^{\mathbb{R}}$ désigne comme d'habitude l'adhérence algébrique de H dans $GL(n, \mathbb{R})$. Alors $P(G) \cap H^{\mathbb{R}}$ est uniforme dans $P(G)$. D'un autre côté, $H^{\mathbb{R}}$ est contenu dans l'adhérence algébrique de $P(G)$ dans $GL(n, \mathbb{R})$ dans laquelle $P(G)$ est d'indice fini. Donc $P(G) \cap H^{\mathbb{R}}$ est d'indice fini dans $H^{\mathbb{R}}$. Puisque $P(G)^{\mathbb{Q}}$ et H sont commensurables, $P(G)^{\mathbb{Z}}$ et $H^{\mathbb{Z}}$ le sont aussi. Par conséquent, si on démontre que $H^{\mathbb{Z}}$ est uniforme dans $H^{\mathbb{R}}$, $P(G)^{\mathbb{Z}} \cap H^{\mathbb{Z}}$ sera uniforme dans $P(G) \cap H^{\mathbb{R}}$, et donc $P(G)^{\mathbb{Z}}$ sera uniforme dans $P(G)$. Il suffit donc de démontrer que $H^{\mathbb{Z}}$ est uniforme dans $H^{\mathbb{R}}$. Soit S un $\mathbb{Q}$ -tore maximal contenu dans H . Alors il suffit de démontrer que $S^{\mathbb{Z}}$ est uniforme dans $S^{\mathbb{R}}$.

4°) Soient P_i les représentations de $\tilde{G}$ sur les espaces $\mathcal{B}^{i-1}(\mathfrak{n})/\mathcal{B}^i(\mathfrak{n})$ ($1 \leq i \leq s$) déduites de la représentation P , et soit P_0 la représentation somme-directe de $P_1, \dots, P_s$. Pour un élément x de G , on a :

$$P(x) = \begin{bmatrix} P_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & P_s(x) \end{bmatrix}, \quad P_0(x) = \begin{bmatrix} P_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_s(x) \end{bmatrix}.$$

Supposons que les éléments $X_{\alpha(i)+1}, \dots, X_n$ forment une base de $\mathcal{B}^i(\mathfrak{n})$, où $0 = \alpha(0) < \dots < \alpha(s) = n$. Si $\alpha(i-1) < j \leq \alpha(i)$ et si u est un élément de $\tilde{D}$, on a la relation de congruence

$$ux_j u^{-1} \equiv \prod_{k=\alpha(i-1)+1}^{k=\alpha(i)} x_k^{a_{jk}} \pmod{\mathcal{B}^i(\tilde{N})}.$$

Puisque le groupe $\mathcal{C}^{i-1}(\tilde{N})/\mathcal{C}^i(\tilde{N})$ est commutatif, on obtient la relation

$$P_i u(X_j) = \sum_{k=\alpha(i-1)+1}^{k=\alpha(i)} a_k X_k,$$

où les a_k sont des entiers. Donc $P_i u$ est une matrice entière de déterminant ± 1 , de sorte que tout élément de $P_0(D)$ est une telle matrice. $P_0(G)^Z$ est donc uniforme dans $P_0(G)$.

5°) La représentation P_0 se factorise comme $P_0 = \Phi \circ P$, où Φ est une représentation de $P(G)$. Φ donne par la manière naturelle une représentation de H^R , laquelle nous désignerons encore par Φ . Puisque $P(G)^Q$ et H sont commensurables et que $P(D)$ est contenu dans $P(G)^Q$, $H \cap P(D)$ est d'indice fini dans $P(D)$. Donc $\Phi(H) \cap P_0(D)$ est d'indice fini dans $P_0(D)$. Puisque $P_0(D)$ est uniforme dans $P_0(G)$ et que $P(G) \cap H^R$ est d'indice fini dans H^R , $\Phi(H) \cap P_0(D)$ est uniforme dans $\Phi(H)^R$. Puisque le noyau de P_0 contient $\tilde{N}$, $\Phi(H) = \Phi(S)$. Par le Lemme 7, la représentation Φ de S est équivalent à la représentation identique de S sur le corps des nombres rationnels. Donc le Lemme 8 entraîne que S^Z est uniforme dans S^R . On a donc vu la deuxième condition satisfaite.

6°) Soit f l'homomorphisme canonique de $\tilde{N}$ sur N . Le rang du noyau de f est égal à $\dim K$. Le noyau de f est donc contenu et uniforme dans le sous-groupe analytique de $\tilde{G}$ correspondant à $\mathfrak{k}$, et par suite $\tilde{D} \cap \tilde{K}$ est uniforme dans $\tilde{K}$. Il existe donc un système libre de générateurs $y_{t+1}, \dots, y_n$ de $\tilde{D} \cap \tilde{K}$ tel que, si on pose $y_i = \exp Y_i$ ($t+1 \leq i \leq n$), les éléments $Y_{t+1}, \dots, Y_n$ forment une base de $\mathfrak{k}$. D'un autre côté, $(D \cap \tilde{N})K$ est fermé dans $\tilde{N}$ et il existe un système libre de générateurs $y_1^*, \dots, y_t^*$ de $(\tilde{D} \cap \tilde{N})\tilde{K}/\tilde{K}$. Soit y_i ($1 \leq i \leq t$) une image réciproque de y_i^* dans $\tilde{D} \cap \tilde{N}$, et soit Y_i ($1 \leq i \leq t$) l'élément de $\mathfrak{n}$ tel que $y_i = \exp Y_i$. Alors les éléments $y_1, \dots, y_n$ forment un système libre de générateurs de $\tilde{D} \cap \tilde{N}$ et les éléments $Y_1, \dots, Y_n$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{n}$ adaptée à la série normale $\mathfrak{n}, \mathfrak{k}, \{0\}$ de $\mathfrak{n}$. Puisque $x_1, \dots, x_n$ est un système libre de générateurs de $\tilde{D} \cap \tilde{N}$, l'élément y_i ($1 \leq i \leq n$) se représente sous la forme $\prod_{j=1}^n x_j^{a_{ij}}$, où les a_{ij} sont des entiers. En vertu du Lemme 1, on obtient la relation $Y_i = \sum_{j=1}^n b_j X_j$, où les b_j sont des nombres rationnels. Les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont donc liées par une transformation rationnelle. Nous considérons maintenant tout endomorphisme de $\mathfrak{n}$ comme une matrice par rapport à $\mathcal{B}$. En vertu du Lemme 8, $P(G)^Z$ est uniforme dans $P(G)$ aussi pour $\mathcal{B}$. On a donc vu toutes les conditions voulues satisfaites.

7°) On se propose maintenant de démontrer la réciproque. Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$. Il est à remarquer que $\mathfrak{z}$ contient $\mathfrak{k}$ et que $\mathfrak{z}$ est le noyau de ρ . On peut supposer par le Lemme 8 que notre base rationnelle $\mathcal{B} = X_1, \dots, X_r, Z_1, \dots, Z_s$ est adaptée à la série normale $\mathfrak{n}, \mathfrak{z}, \mathfrak{k}, \{0\}$ de $\mathfrak{n}$ et que les éléments $Z_1, \dots, Z_s$ forment une base de $\mathfrak{z}$ telle que les éléments $\exp Z_i$ ($1 \leq i \leq s$) engendrent un sous-groupe dicret du centre Z de N . Désignons par $\mathfrak{n}^Q$ l'algèbre de Lie sur Q formée des combinaisons linéaires des membres de $\mathcal{B}$ à coefficients rationnels. Le centre $\mathfrak{z}^Q$ de $\mathfrak{n}^Q$ est alors l'ensemble des combinaisons linéaires de $Z_1, \dots, Z_s$ à coefficients rationnels. Soient H la composante irréductible de l'élément neutre de l'adhérence algébrique de $P(G)^Q$ dans $GL(n, Q)$ et $H = S \cdot H_u$ une décomposition de Chevalley de H . Puisque les matrices de S sont toutes semi-simples et qu'elles transforment Z^Q sur lui-même, il existe un sous-espace $\mathfrak{m}^Q$ de $\mathfrak{n}^Q$ tel que $\mathfrak{n}^Q$ se décompose en somme directe de $\mathfrak{m}^Q$ et de $\mathfrak{z}^Q$, et que $\mathfrak{m}^Q$ soit stable par S .

8°) H_u^Z est uniforme dans H^R d'après la Proposition 18 de T. Ono [8] et notre Lemme 2. Puisque H_u^R est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe (voir Corollaire 2, p. 125 de [1]) et contenu dans $P(G)$, il existe des matrices unipotentes rationnelles $Y_1^*, \dots, Y_r^*$ telles qu'elles forment une base de $\rho(\mathfrak{n}^Q)$ et que les éléments $y_i^* = \exp Y_i^*$ ($1 \leq i \leq r$) constituent un système libre de générateurs de H_u^Z . Soit Y_i ($1 \leq i \leq r$) l'élément de $\mathfrak{m}^Q$ tel que $\rho(Y_i) = Y_i^*$. Alors les éléments $Y_1, \dots, Y_r, Z_1, \dots, Z_s$ forment aussi une base rationnelle $\mathcal{B}'$ de $\mathfrak{n}$.

Soit $y_i = \exp Y_i$ dans G . On a la relation $y_i^* y_j^* y_i^{*-1} = \prod_{k=1}^r y_k^{*a_{ijk}}$ ($1 \leq i, j \leq r$), d'où la relation: $y_i y_j y_i^{-1} = \prod_{k=1}^r y_k^{a_{ijk}} v_{ij}$, v_{ij} étant un élément de Z . Il suit du Lemme 1 et de la rationalité de la base $\mathcal{B}'$ que v_{ij} est de la forme $\exp \sum_{k=1}^s b_{ijk} Z_k$, où les b_{ijk} sont des nombres rationnels. Soit p un dénominateur commun des b_{ijk} , et posons $Z'_k = (1/p) Z_k$ et $z'_k = \exp Z'_k$. Alors v_{ij} est de la forme

$$\prod_{k=1}^s z'_k{}^{c_{ijk}},$$

où c_{ijk} sont des entiers. Il en résulte que les éléments $y_1, \dots, y_r, z'_1, \dots, z'_s$ engendrent un sous-groupe dicret et uniforme dans N .

9°) D'après le Lemme 6, g se décompose en produit semi-direct d'une sous-algèbre commutative α et de $\mathfrak{n}$. Alors $G = AN$, où A est le sous-groupe analytique de G correspondant à α . Désignons par P_A la restriction de P à A . Le noyau de P_A est discret et $P_A(A) = P(G) \cap S^R$. Soit $u_1^*, \dots, u_t^*$ un

système de générateurs de $S^Z \cap P(G)$ et soit u_i ($1 \leq i \leq l$) une image réciproque de u_i^* par P_A . Soit encore $u_1, \dots, u_m$ un système de générateurs du noyau de P_A . Il est alors facile à voir que les éléments $u_1, \dots, u_m$ engendrent l'image réciproque D_A de $S^Z \cap P(G)$ par P_A , qui est un sous-groupe discret et uniforme dans A .

10°) Soit M l'ensemble des éléments de N de la forme $\exp X$, où $X \in \mathfrak{m}$. D'après le Lemme 9, tout élément de N peut s'écrire dans une seule façon comme le produit d'un élément de M et d'un élément de Z . En vertu de l'invariance de $\mathfrak{m}$ sous les opérations de S , l'élément $u_i y_j u_i^{-1} = \exp Pu_i(Y_j)$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r$) appartient à M . D'un autre côté, on a la relation $u_i^* y_j^* u_i^{*-1} = \prod_{k=1}^r y_k^{*a_{ijk}}$, d'où la relation: $u_i y_j u_i^{-1} = \prod_{k=1}^r y_k^{a_{ijk}} \cdot v_{ij}$, $v_{ij} \in Z$.

Par le Lemme 1 et par la rationalité de la base $Y_1, \dots, Y_r, Z'_1, \dots, Z'_r$, $\prod_{k=1}^r y_k^{a_{ijk}}$ est de la forme $\exp(\sum_{k=1}^r b_{ijk} Y_k + \sum_{k=1}^s c_{ijk} Z'_k)$, où les b_{ijk} et les c_{ijk} sont des nombres rationnels.

Soit q un dénominateur commun des c_{ijk} , et posons $Z''_k = (1/q)Z'_k$, $z''_k = \exp Z''_k$. On a alors $\exp \sum_{k=1}^s c_{ijk} Z'_k = \prod_{k=1}^s z''_k^{d_{ijk}}$, où les d_{ijk} sont des entiers.

L'expression $\prod y_k^{a_{ijk}} = (\exp \sum b_{ijk} Y_k) \cdot (\prod z''_k^{d_{ijk}})$ fournit une décomposition suivant $N = MZ$. En vertu de l'unicité, on obtient que $v_{ij} = \prod z''_k^{-d_{ijk}}$.

On a en plus:

$$u_i z''_j u_i^{-1} = \exp Pu_i(Z''_j) = \exp(1/pq) Pu_i(Z_j).$$

Puisque Pu_i est une matrice entière par rapport à la base $\mathcal{B}$, on a $Pu_i(Z_j) = \sum_{k=1}^s a_{ijk} Z_k$, où les a_{ijk} sont des entiers. On obtient donc $u_i z''_j u_i^{-1} = \prod_{k=1}^s z''_k^{a_{ijk}}$.

11°) Soit D_N le sous-groupe discret et uniforme dans N engendré par les éléments $y_1, \dots, y_r, z''_1, \dots, z''_s$. Posons enfin D le sous-groupe de G engendré par D_A et D_N . Alors les règles de commutations entre des générateurs de D décrites dans 8° et 10° montrent que $D = D_A D_N$ et que D est discret. De l'autre côté, le Lemme 2 implique que D est uniforme dans G , ce qui achève la démonstration du Théorème 3'.

COROLLAIRE 1. La condition 2) du Théorème 3' peut se remplacer par les deux conditions suivantes.

3) $(P(G)^Q)^{\mathbf{R}}$ est uniforme dans l'adhérence algébrique de $P(G)$ dans $GL(n, \mathbf{R})$.

4) Soit H la composante irréductible de l'élément neutre de l'adhérence algébrique de $P(G)^Q$ dans $GL(n, Q)$. Alors H n'admet pas de caractère rationnel non-trivial.

C'est une conséquence immédiate du Théorème 3' et du Théorème 2.

COROLLAIRE 2. Soit G^* l'adhérence algébrique de $P(G)$ dans $GL(n, R)$ et soit $G^* = S^* \cdot G_u^*$ une décomposition de Chevalley de G^* . Alors la condition 2) du Théorème 3' peut se remplacer par les deux conditions suivantes.

5) H_u est algébriquement dense dans G_u^* .

6) $\text{rang } X(S^*) = \text{rang } S^{*Z}$.

Supposons en effet qu'il existe dans G un sous-groupe discret et uniforme. Puisque G_u^* est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe et que $(P(G)^Q)^R$ est uniforme dans G^* , H_u est algébriquement dense dans G_u^* . Puisque H^R est uniforme dans G^* et que $X(S^*) = X(G)^*$, le Lemme 2 et la Proposition 6 entraînent la condition 6).

Si réciproquement les deux conditions sont satisfaites, le Lemme 2, la Proposition 6 et la Proposition 18 de Ono [8] impliquent que H^Z est uniforme dans G^R , ce qui démontre le Corollaire 2.

4. Structures kähleriennes.

LEMME 10. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des nombres réels, et soit $\mathcal{F}$ une famille linéaire commutative formée de transformations linéaires semi-simples de V . Si $\mathcal{F}$ transforme V sur lui-même, il existe un élément X de $\mathcal{F}$ tel qu'il transforme V sur lui-même

Soit $V = V_1 + \dots + V_s$ une décomposition de V en somme directe de sous-espaces simples. Alors $\dim V_i$ est 1 ou 2, et il existe des éléments X_i ($1 \leq i \leq s$) de $\mathcal{F}$ tels que $X_i(V_i) = V_i$. On peut alors trouver une combinaison linéaire $X = \sum_{i=1}^s \xi_i X_i$ telle que $X(V) = V$.

THÉORÈME 4. Soit G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. Pour qu'il existe dans G un sous-groupe commutatif discret et uniforme, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient satisfaites:

1°) l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est commutative;

2°) il existe une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}$ se décompose en produit semi-direct de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{g}'$;

3°) l'image de G par sa représentation sur l'espace $\mathfrak{g}'$ déduite de sa représentation adjointe est compacte.

S'il en est ainsi, il suit de là que :

(i) le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ est commutatif, et $\mathfrak{n}$ se décompose en produit direct de $\mathfrak{g}'$ et du centre de $\mathfrak{g}$.

(ii) la série centrale décroissante de $\mathfrak{g}$ se termine avec $\mathfrak{g}'$; c'est-à-dire, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$. Donc $\mathfrak{g}'$ est de dimension paire.

Supposons d'abord les trois conditions satisfaites. Soit H le sous-groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{h}$, et soit Φ la représentation de H sur l'espace $\mathfrak{g}'$ déduite de la représentation adjointe de G . Alors le noyau de Φ est uniforme dans H d'après la condition 3°, et il existe une base $X_1, \dots, X_s$ de $\mathfrak{h}$ telle que $\Phi(\exp X_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq s$. Prenons du reste une base $X_{s+1}, \dots, X_n$ de $\mathfrak{g}'$. Alors les éléments $\exp X_i$ ($1 \leq i \leq n$) engendrent un sous-groupe commutatif discret et uniforme dans G .

Supposons ensuite que G contienne un sous-groupe commutatif discret et uniforme D . Désignons comme toujours par P of ρ respectivement les représentations de G et de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{n}$ qui se déduisent de leurs représentations adjointes. Soit N le sous-groupe analytique de G qui correspond à $\mathfrak{n}$. $D \cap N$ étant uniforme par le Théorème M, N est commutatif par la Proposition 4. Il existe une base $X_{r+1}, \dots, X_n$ de $\mathfrak{n}$ telle que les éléments $x_i = \exp X_i$ ($r < i \leq n$) forment un système libre de générateurs de $D \cap N$. Pour tout élément x de D , on a la relation $\exp \text{Ad} x(X_i) = x x_i x^{-1} = x_i = \exp X_i$, et par suite $\text{Ad} x(X_i) = X_i$. Donc $P(D) = \{1\}$. De l'autre côté, $P(N) = \{1\}$ puisque N est commutatif. $P(G)$ s'identifie donc à l'image d'un espace compact G/DN par une application continue, ce qui implique que $P(G)$ est compact. Soit G^∞ le dernier terme de la série centrale décroissante de G . Alors le groupe DG^∞/G^∞ est un sous-groupe commutatif uniforme dans le groupe nilpotent simplement connexe G/G^∞ . Donc G/G^∞ est commutatif, ce qui implique que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$. Ce fait avec la semi-simplicité de la représentation ρ nous donne la décomposition de $\mathfrak{n}$ en produit direct de $\mathfrak{g}'$ et du centre de $\mathfrak{g}$.

Les éléments de $\rho(\mathfrak{g})$ restreints à $\mathfrak{g}'$ forment une famille linéaire de transformations linéaires semi-simples de $\mathfrak{g}'$, et en plus elle transforme $\mathfrak{g}'$ sur lui-même. Il existe d'après le Lemme 10 un élément L de $\mathfrak{g}$ tel que $[L, \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$. Soit $\mathfrak{h}$ le centralisateur de L dans $\mathfrak{g}$. Il est évident que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \{0\}$. Si X est un élément de $\mathfrak{g}$, il existe un élément Y de $\mathfrak{g}'$ tel que $[L, X] = [L, Y]$. Donc $X - Y$ appartient à $\mathfrak{h}$, ce qui dit que $\mathfrak{g}$ est la somme directe des sous-

espaces $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{g}'$. Si X, Y sont des éléments de $\mathfrak{h}$, on a la relation $[L, [X, Y]] = [[L, X], Y] - [[L, Y], X] = 0$. Donc $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. En plus, $\mathfrak{h}$ est commutative puisqu'elle est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. Le Théorème 4 est donc démontré.

COROLLAIRE. *Les notations étant celles du Théorème 4, on peut prendre une base L_i ($1 \leq i \leq r$) de $\mathfrak{h}$ et une base A_j, B_j ($1 \leq j \leq t$) de $\mathfrak{g}'$ de telle sorte que l'on ait les relations de structure $[L_i, A_j] = a_{ij}B_j$, $[L_i, B_j] = -a_{ij}A_j$, où a_{ij} sont des entiers.*

Remarque. Soient G, N, Z et Z_0 respectivement un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe, le plus grand sous-groupe analytique distingué nilpotent de G , le centre de G et sa composante connexe de l'élément neutre. On a alors l'inégalité suivante [9];

$$\text{rang } Z/Z_0 \leq \dim G - \dim N.$$

Il est donc évident que pour le group dans le Théorème 4, le rang en question est égal à $\dim G - \dim N$.

LEMME 11. *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe de matrices réelles. Si G contient un sous-groupe commutatif et uniforme, G est lui-même commutatif.*

Il est bien connu que G est le produit direct du plus grand sous-groupe compact K et d'un sous-groupe connexe et simplement connexe A . Soit D un sous-groupe commutatif et uniforme dans G . DK/K est un sous-groupe commutatif et uniforme dans G/K . La Proposition 4 implique donc que G/K est commutatif. A étant isomorphe à G/K , G est lui-même commutatif, ce qui finit la démonstration.

Le Théorème suivant est dû à J. Hano [2], qui n'y est d'ailleurs pas explicitement mentionné.

THÉORÈME H. *Soit G un groupe de Lie unimodulaire connexe et simplement connexe de dimension paire. Pour que G admette une structure kählerienne invariante à droite, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:*

1°) *l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est commutative;*

2°) *il existe une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}$ se décompose en produit semi-direct de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{g}'$;*

3°) l'image de G par sa représentation sur $\mathfrak{g}'$ déduite de sa représentation adjointe a l'adhérence compacte dans $GL(\mathfrak{g}')$;

4°) la série centrale décroissante de $\mathfrak{g}$ se termine à $\mathfrak{g}'$.

On obtient trivialement le corollaire suivant du Théorème 4 et du Théorème H.

COROLLAIRE. *Si un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe de dimension paire contient un sous-groupe commutatif discret et uniforme, il admet une structure kählérienne invariante à droite. Si en particulier G est unimodulaire et si l'image de G par sa représentation sur l'espace $\mathfrak{g}'$ déduite de sa représentation adjointe est fermée dans $GL(\mathfrak{g}')$, la réciproque est aussi vraie.*

THÉORÈME 5. *Soit G un groupe algébrique résoluble d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des nombres réels. Alors les conditions (a) et (b) ci-dessous sont équivalentes. Si en particulier la dimension de G est paire, elles sont équivalentes à la condition (c).*

(a) G contient un sous-groupe commutatif discret et uniforme;

(b) G satisfait aux trois conditions dans le Théorème 4;

(c) G est unimodulaire et admet une structure kählérienne invariante à droite.

Remarquons d'abord que l'image de G par sa représentation sur $\mathfrak{g}'$ déduite de sa représentation adjointe est fermée dans $GL(\mathfrak{g}')$ par le Lemme 5. Désignons par G_0 la composante connexe de l'élément neutre de G et par $\tilde{G}$ le revêtement universel de G_0 .

Supposons d'abord la condition (b) satisfaite. Alors $\tilde{G}$ satisfait aussi à (b). Soient H et $\tilde{H}$ les sous-groupes analytiques correspondant à $\mathfrak{h}$ dans G_0 et $\tilde{G}$ respectivement; et soient Z et Z_0 le centre de $\tilde{G}$ et sa composante connexe de l'élément neutre. Puisque $\text{rang } Z/Z_0$ ne peut pas dépasser $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{n}$, Z doit être contenu dans $\tilde{H}$. Donc H est fermé dans G_0 . Alors notre argument dans la démonstration du Théorème 4 reste valable sans aucune modification, et (b) entraîne (a).

Supposons ensuite la condition (a) satisfaite. On peut supposer que G_0 contient un sous-groupe commutatif discret et uniforme D . Soit N le sous-groupe analytique de G_0 correspondant à $\mathfrak{n}$. Le Théorème M dit que $D \cap N$ est uniforme dans N . N étant un groupe nilpotent connexe de matrices réelles, le Lemme 11 implique que N est commutatif. On voit alors facile-

ment que $P(G)$ est compact, comme dans la démonstration du Théorème 4. Soit G^∞ le dernier terme de la série centrale décroissante de G . Puisque G est algébrique, G^∞ est aussi algébrique (voir [1]) et donc fermé dans G . Alors le groupe DG^∞/G^∞ est un sous-groupe commutatif et uniforme dans G/G^∞ . Puisque G/G^∞ est isomorphe à un groupe algébrique nilpotent de matrices réelles (voir [1]), le Lemme 11 implique que G/G^∞ est commutatif, ce qui entraîne que $[g, g'] = g'$. Le reste de la démonstration est tout à fait le même que la dernière partie de celle du Théorème 4. Donc (a) entraîne (b).

Supposons enfin la dimension de G paire. La condition (c) équivaut à dire que $\tilde{G}$ est unimodulaire et admet une structure kählienne invariante à droite. Alors le Théorème 4 et le Corollaire du Théorème II établissent l'équivalence de (c) et (b). Le Théorème 5 est donc démontré.

5. Une construction d'une variété abélienne. On se propose maintenant de construire une variété abélienne à partir d'une structure kählienne invariante à droite sur un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. Soit G un tel groupe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Une structure kählienne invariante sur G est donnée par une paire (J, B) d'une transformation linéaire J de $\mathfrak{g}$ appelée la structure complexe de $\mathfrak{g}$ et d'une forme bilinéaire symétrique positive non-dégénérée B sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ à valeurs réelles appelée la métrique kählienne sur $\mathfrak{g}$, lesquelles satisfont ensemble aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} J^2 &= -1, \\ J[X, Y] &= [JX, Y] = [X, JY] = J[JX, JY] = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \\ B(JX, JY) &= B(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \\ dK &= 0, \end{aligned}$$

où $K(X, Y) = B(JX, Y)$ et K est considéré comme une cochaîne de degré 2 sur $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{h}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ complémentaire orthogonal à l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$ par rapport à B . Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}$ se décompose en produit semi-direct de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{g}'$ (voir [2]). Il existe donc une base L_i ($1 \leq i \leq r$) de $\mathfrak{h}$ et une base A_j, B_j ($1 \leq j \leq t$) de $\mathfrak{g}'$ telle qu'on ait les relations de structure

$$[L_i, A_j] = a_{ij}B_j, \quad [L_i, B_j] = -a_{ij}A_j,$$

où a_{ij} sont des nombres réels, qui ne sont pas nécessairement rationnels. On désignera cette base par $\mathcal{B}$.

D'après J. Hano [2], les sous-espaces $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}'$ sont respectivement stables

par J . Donc les restrictions de (J, B) à $\mathfrak{h}$ et à $\mathfrak{g}'$ donnent respectivement des structures kählériennes sur H et sur G' , où H et G' sont les sous-groupes analytiques de G correspondant à $\mathfrak{h}$ et à $\mathfrak{g}'$ respectivement. Nous montrerons d'abord que la variété kählérienne G se décompose en produit direct des deux variétés kählériennes H et G' .

Tout élément x de G s'écrit dans une seule façon sous la forme suivante :

$$x = \exp X \cdot \exp C, \quad X = \sum_{i=1}^r x_i L_i, \quad C = \sum_{j=1}^t (u_j A_j + v_j B_j).$$

Prenons deux bases de l'espace tangent à G en x . La première est la translatée à droite de la base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$. Les fonctions définies autour de x seront considérées comme fonctions de n variables réelles définies autour du point $(x_1, \dots, x_r, u_1, v_1, \dots, u_t, v_t)$. Leurs différentiations partielles par rapport à chaque variable forment la deuxième base. Remarquons ici que la deuxième base est adaptée à la décomposition de la variété G en produit direct des deux variétés H et G' . On obtient aisément la matrice de transition de ces deux bases :

$$\left. \begin{array}{l} r \\ 2t \end{array} \right\} \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{cc} \cos a_1 & -\sin a_1 \\ \sin a_1 & \cos a_1 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \end{array} \right), \quad a_j = \sum_{i=1}^r x_i a_{ij}.$$

On obtient donc la décomposition de la variété kählérienne G en produit direct des deux variétés kählériennes H et G' .

Nous posons désormais les deux hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE 1. *L'image de G par sa représentation sur $\mathfrak{g}'$ déduite de sa représentation adjointe est fermée dans $GL(\mathfrak{g}')$.*

Alors le groupe G est du type traité dans le Théorème 4, et donc on suppose que les constantes de structure a_{ij} de la base $\mathcal{B}$ soient toutes entières (voir Corollaire du Théorème 4).

HYPOTHÈSE II. *La matrice associée à la forme bilinéaire K par rapport à la base $\mathcal{B}$ est rationnelle.*

Les éléments $\exp 2\pi L_i$ ($1 \leq i \leq r$), $\exp A_j$, $\exp B_j$ ($1 \leq j \leq t$) engendrent un sous-groupe commutatif discret et uniforme dans G . Nous le désignons par D . Sous ces hypothèses, nous allons montrer que la variété G/D sera munie d'une structure de variété abélienne déduite de la structure kählérienne sur G .

D est le produit direct de $D \cap H$ et de $D \cap G'$. Puisque $D \cap H$ est central dans G , la variété quotient G/D se décompose en produit direct des deux variétés $H/D \cap H$ et $G'/D \cap G'$. Donc la variété kählérienne quotient G/D est le produit direct des deux tores kählériens $H/D \cap H$ et $G'/D \cap G'$.

On considère H comme espace vectoriel et définit une structure complexe J de H par $J_x = \exp 2\pi JX$, où $x = \exp 2\pi X$, $X \in \mathfrak{h}$. On définit une forme bilinéaire E sur $H \times H$ par $E(x, y) = -K(X, Y)$, où $x = \exp 2\pi X$, $y = \exp 2\pi Y$, $X, Y \in \mathfrak{h}$. Il est alors facile de vérifier les conditions de Riemann pour E de sorte que $H/D \cap H$ est une variété abélienne. Il en est de même de $G'/D \cap G'$. La variété G/D est donc le produit direct de deux variétés abéliennes.

Exemple. Supposons que l'hypothèse I se vérifie pour G . Prenons la matrice unité pour matrice associée à la forme bilinéaire B et la matrice

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ \hline & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right]$$

pour matrice de la transformation linéaire J , toutes les deux par rapport à la base $\mathcal{B}$. On voit facilement que (J, B) donne une structure kählérienne invariante à droite sur G et que l'hypothèse II se vérifie.

BIBLIOGRAPHIE.

-
- [1] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie III*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1226, Paris, 1955.
- [2] J. Hano, "On kaelerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups," *American Journal of Mathematics*, vol. 76 (1957), pp. 885-900.
- [3] A. I. Malcev, "On a class of homogeneous spaces," *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya*, vol. 13 (1949), pp. 9-32 (en russe); *American Mathematical Society Translation* No. 39 (1951).
- [4] Y. Matsushima, "On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups," *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 2 (1951), pp. 95-110.
- [5] G. D. Mostow, "Factor spaces of solvable groups," *Annals of Mathematics*, vol. 60 (1954), pp. 1-27.
- [6] ———, "Self adjoint groups," *ibid.*, vol. 62 (1955), pp. 44-55.
- [7] ———, "On the fundamental group of a homogeneous space," *ibid.*, vol. 66 (1957), pp. 249-255.
- [8] T. Ono, "On some arithmetic properties of linear algebraic groups," *ibid.*, vol. 70 (1959), pp. 266-290.
- [9] M. Saito, "Sur certains groupes de Lie résolubles I et II," *Scientific Papers of the College of General Education. University of Tokyo*, vol. 7 (1957), pp. 1-11, pp. 157-168.
- [10] ———, "Sur certains groupes résolubles," *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, vol. 248 (1959), pp. 1909-1911.
- [11] *Séminaire "Sophus Lie" 1954/55*, Exposé No. 22, 1955.
- [12] A. Weil, *Discontinuous subgroups of classical groups*, Lecture notes, University of Chicago, 1958.

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

“Algèbres de Gelfand - Naimark.”



VU ET APPROUVÉ:

Paris, le 2 Juin 1960,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PERÈS

VU ET PERMIS D'IMPRIMER:

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH



